Энгельсский технологический институт (филиал) федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Саратовский государственный технический университет имени Гагарина
Ю.А.»

И.А. Челышева

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧЕРТЕЖА

Решение задач по материалам второго модуля

Методические рекомендации
к выполнению практической работы и подготовке к модулю
по курсу: «Начертательная геометрия для студентов направлений

09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»
09.03.04 «Программная инженерия»
15.03.02 «Технологические машины и оборудование»
15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение
машиностроительных производств»
18.03.01 «Химическая технология»
23.03.01 «Нефтегазовое дело»
29.03.05 «Конструирование изделий легкой промышленности»

очной и заочной формы обучения

Энгельс 2025

УДК 577.12:663/664 (075.8)+612.39(075.8)

СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ

Многие геометрические элементы при проецировании на плоскость представляются в искаженном виде. Часто требуется знать натуральную величину какого-либо элемента или его расположение. В решениях задач стремятся разместить объект таким образом, чтобы требуемый элемент был параллелен или перпендикулярен плоскости проекций, например, прямая стала параллельной или вырождалась в точку, плоскость проецировалась в линию и т.д.

Для получения истинного изображения предметов существуют методы преобразования, которые можно классифицировать на два типа:

- построение по двум проекциям, заданными на основной плоскости, еще одной дополнительной проекции, на неосновную плоскость, которая вводится в существующую систему таким образом, чтобы проецируемый объект располагался параллельно и перпендикулярно вводимой плоскости, сам оставаясь при этом неподвижно.
- изменение положения объекта в пространстве, при неизменной системе плоскостей проекций, до частного положения.

СПОСОБ ВРАЩЕНИЯ

Способ вращения вокруг некоторой оси заключается в том, что изображаемый объект или его элемент вращается вокруг указанной оси до требуемого положения относительно неподвижной, данной системы плоскостей проекций.

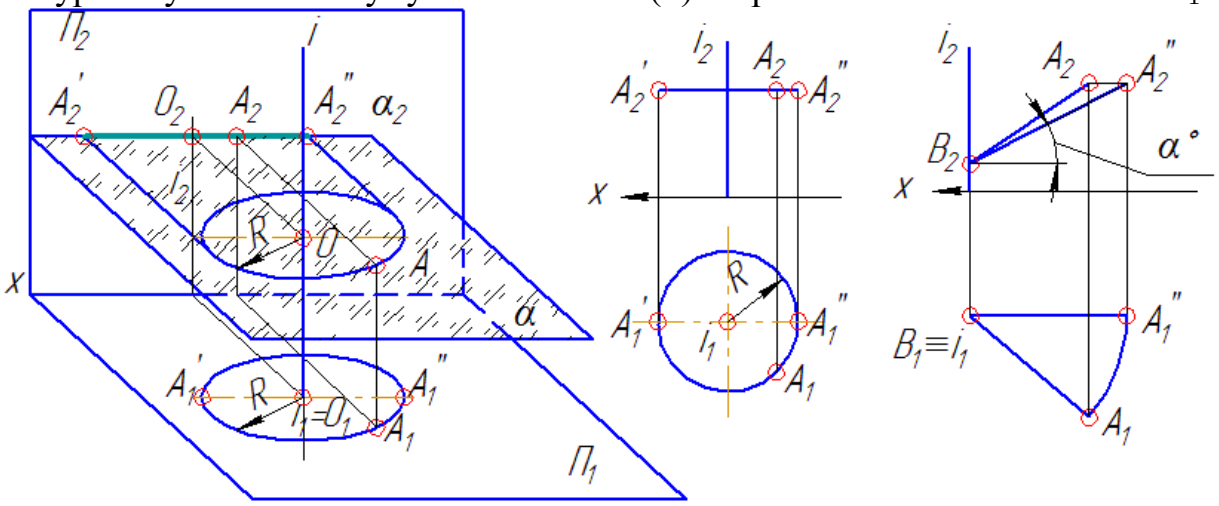
В качестве оси вращения может быть взята любая прямая. В практике преобразования комплексного чертежа лучше использовать вращение вокруг проецирующих осей и линий уровня. Если ось вращения выбрать проходящей через один из концов отрезка, то построение упростится, так как точка, через которую проходит ось, будет неподвижной и для поворота отрезка надо построить новое положение проекции только одной его точки – другого конца.

Если вращать отрезок прямой линии вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций, то проекция на эту плоскость не изменяется ни по виду, ни по величине – меняется лишь положение этой проекции относительно оси проекций. На плоскости параллельной оси вращения все точки проекции отрезка перемещаются по прямым, параллельным оси проекций и проекция изменяется и по форме и по величине. Точка А вращается в плоскости α вокруг неподвижной оси i перпендикулярной плоскости $П_1$, описывает окружность радиусом R (рис.1 а, б). При этом на плоскости $П_1$ траектория (окружность) точки А проецируется в натуральную величину, а на плоскость $П_2$ траектория проецируется в

линию, параллельную оси x.

Для поворота отрезка АВ (рис.1 в) выбрана ось вращения i, перпендикулярная к плоскости $П_1$ ($i_2 \perp x$) и проходящая через точку В ($B_1 \equiv i_1$). В плоскости $П_2$ проекция оси i не указана.

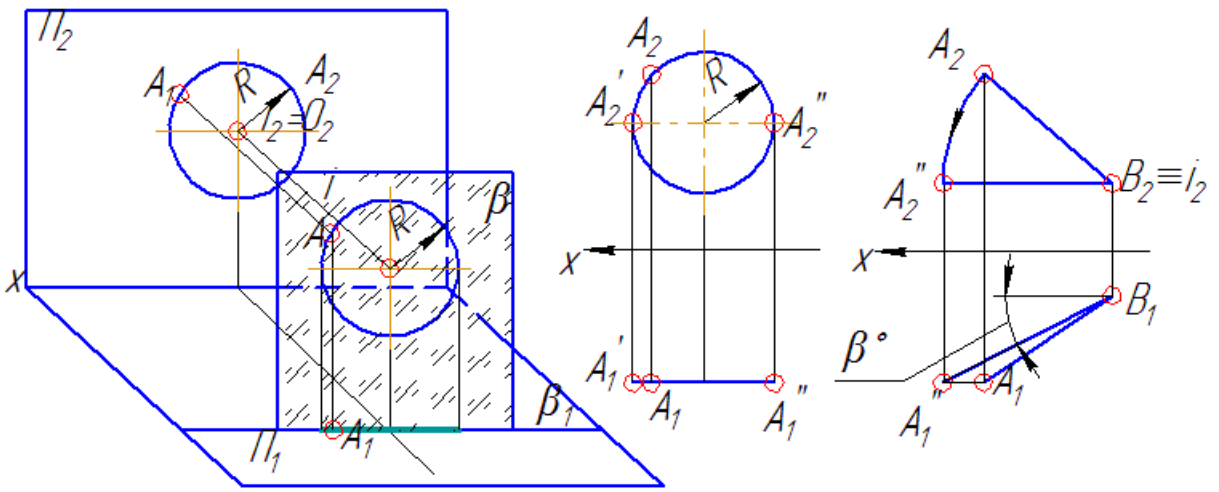
При повороте вокруг такой оси располагаем отрезок параллельно плоскости $П_2$. Горизонтальная проекция отрезка в новом положении параллельна оси *x* ($A_1'' // x$). Точка А вращается в плоскости параллельной горизонтальной плоскости проекций и ее фронтальная проекция переместиться в точку A_2'', по линии параллельной оси x до пересечения с линией связи, проведенной от горизонтальной проекции A_1''. Соединив A_2'' с B_2 получим фронтальную проекцию отрезка АВ в новом положении. Эта проекция $A_2''B_2$ выражает натуральную величину отрезка АВ и натуральную величину угла наклона (α) отрезка АВ к плоскости $П_1$.



а *б* *в*

Рис.1

Аналогичное решение последует, если за ось вращения принять $i \perp П_2$ (рис.2). Тогда $i_1 \perp x$, $B_2 \equiv i_2$. При повороте АВ вокруг оси i фронтальная проекция займет положение параллельное оси *x* $A_2''B_2 // x$, проекция $A_1''B_1$ выражает натуральную величину отрезка АВ, а угол β определяет натуральную величину угла наклона отрезка АВ к плоскости $П_2$.



а *б* *в*

Рис. 2

Задание №1. Найти натуральную величину Отрезка АВ методом вращения вокруг оси перпендикулярной плоскости $П_1$ и отрезка CD вращением вокруг оси перпендикулярной плоскости $П_2$ (рис.3).

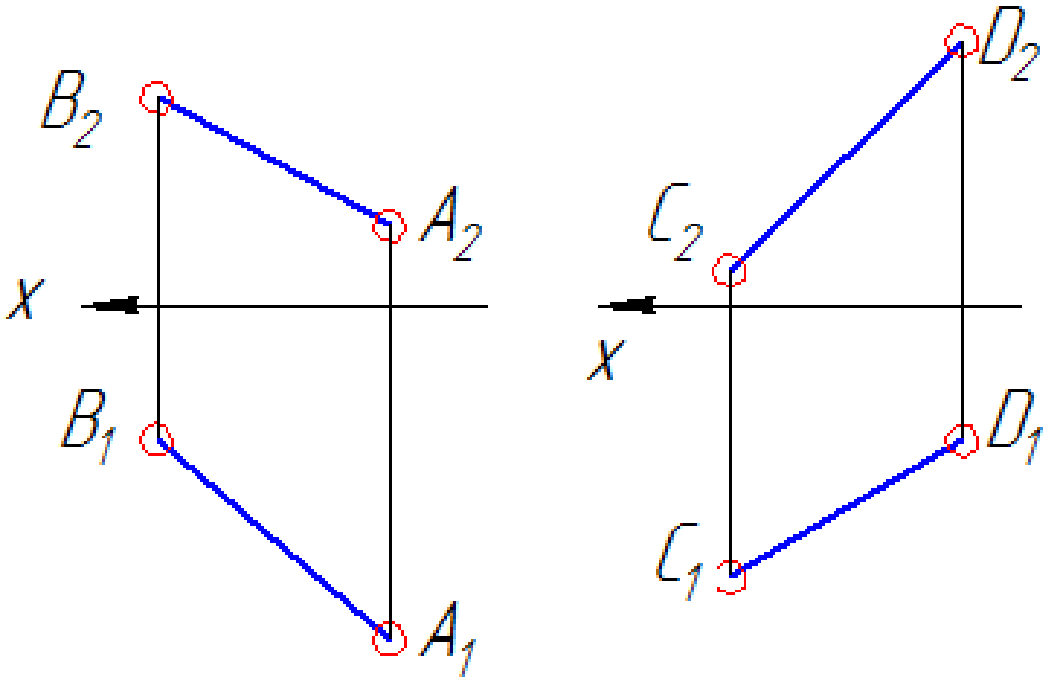


Рис. 3

СПОСОБ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Плоскопараллельным перемещением геометрической фигуры называется такое перемещение, при котором все ее точки перемещаются в плоскостях, параллельных между собой. Плоскопараллельное движение фигуры – это вращение вокруг незакрепленной оси.

Рассмотрим применение плоскопараллельного перемещения для определения натуральной величины треугольника. Для этого выполним два последовательных плоскопараллельных перемещения: первое – перпендикулярно фронтальной плоскости проекций, а второе – параллельно горизонтальной плоскости проекций.

Пусть задан треугольник АСВ ($A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$) (рис.4). Найти натуральную величину треугольника.

Решение заключается в перемещении треугольника до состояния параллельного одной из плоскостей проекций $П_1$ или $П_2$ (в нашем случае $П_1$). На первой стадии переместим плоскость треугольника таким образом чтобы треугольник занял положение перпендикулярное плоскости проекций ($П_2$). Для этого в плоскости треугольника АВС проведем горизонталь h (h_1, h_2).

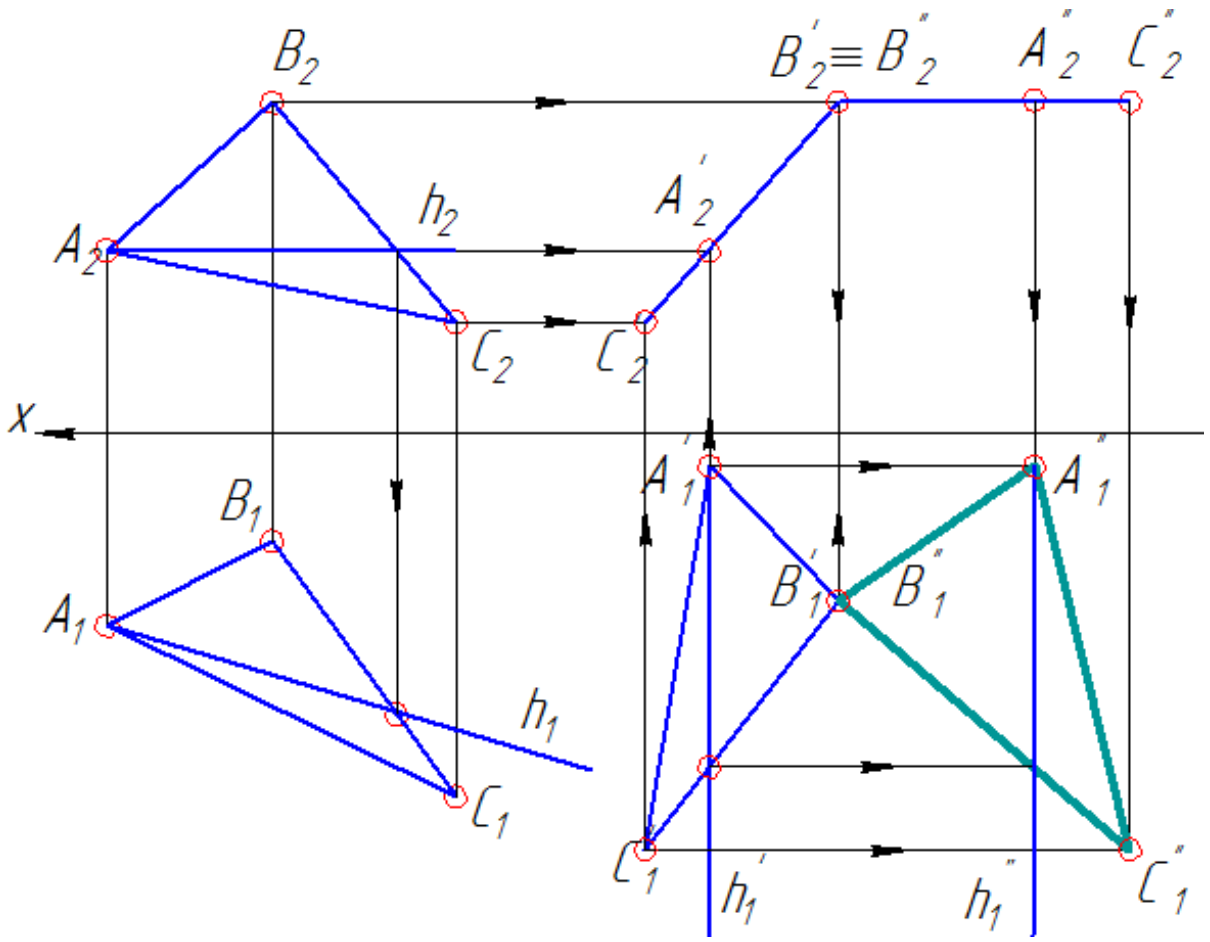


Рис. 4

Поворачиваем треугольник ABC в плоскости $П_1$ вокруг произвольной оси (перпендикулярной $П_1$), которую на чертеже не указываем, но при необходимости можем найти, до положения, когда проекция горизонтали h_1 окажется перпендикулярной оси x. При этом горизонтальная проекция треугольника сохраняет свой вид и величину ($A_1B_1C_1=A'_1B'_1C'_1$ При таком повороте точки A, B и C перемещаются в плоскостях, параллельных плоскости $П_1$. Из точек A'_1, B'_1, C'_1 проводим линии связи в плоскость $П_2$ до пересечения с горизонтальными линиями связи, проведенными из точек A_2, B_2, C_2, получим проекцию $A'_2B'_2C'_2$ треугольника ABC, которая выродится в прямую линию. Это означает, что новое положение треугольника ABC является проецирующим (перпендикулярным).

На следующем этапе осуществляем поворот, приводящий треугольник в положение параллельное плоскости $П_1$ ($ABC//П_1$). Подразумевается, что ось вращения перпендикулярна $П_2$. Теперь фронтальная проекция при повороте сохраняет свой вид и величину, полученные точки A'_1,B'_1, C'_1 переместятся в плоскостях, параллельных плоскости $П_2$, до положения A''_2, B''_2 и C''_2. Проекции точек A''_1, B''_1 и C''_1

находим на пересечении горизонтальных и вертикальных линий связи. Проекция $A_1''B_1''C_1''$ будет натуральной величиной треугольника ABC.

Задание №2. Найти натуральную величину треугольника ABC (рис.5), методом плоскопараллельного перемещения, используя фронталь f плоскости.

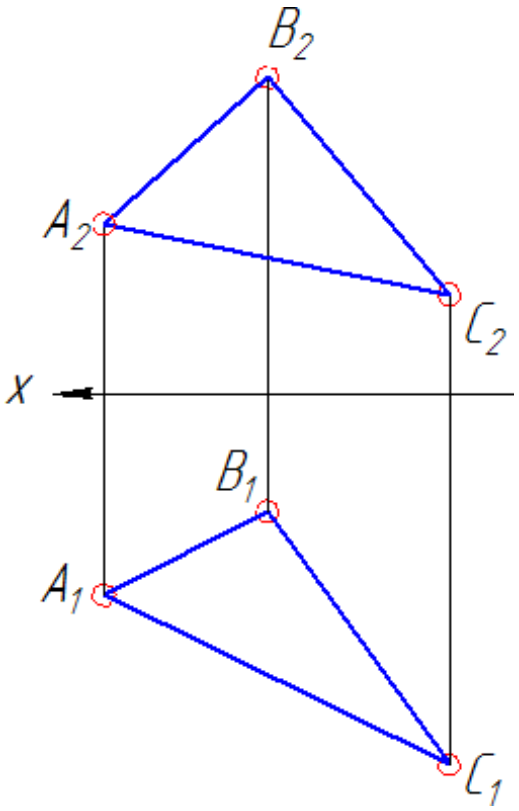


Рис.5

Плоскопараллельным перемещением можно определить натуральную величину отрезка прямой общего положения или преобразовать его в проецирующий. Для этого в одной из плоскостей в рассматриваемом примере в плоскости $П_1$ повернем вокруг оси, перпендикулярной к плоскости $П_1$, но эту ось на чертеже не указываем. Так как горизонтальная проекция отрезка не меняет своей величины, то проекцию $A_1'B_1'$ берем равной A_1B_1 и располагаем параллельно оси x. такое положение проекции дает основание полагать, что сам отрезок параллелен плоскости $П_2$ (рис.6). Находим фронтальную проекцию $A_2'B_2'$ отрезка AB по линиям связи, проведенным в плоскости $П_2$ от точек A_2 и B_2 параллельно оси x и в плоскости $П_1$ от точек A_1' и B_1' перпендикулярно оси x. На пересечении линий связи получим фронтальную проекцию $A_2'B_2'$ нового положения отрезка AB. Проекция $A_2'B_2'$ выражает натуральную величину отрезка AB. Второй поворот выполняем вокруг оси перпендикулярной плоскости $П_2$ до положения

перпендикулярности AB к плоскости $П_1$, расположив проекцию $A_2''B_2'' \perp x$, горизонтальная проекция вырождается в точку $A_1'' \equiv B_1''$.

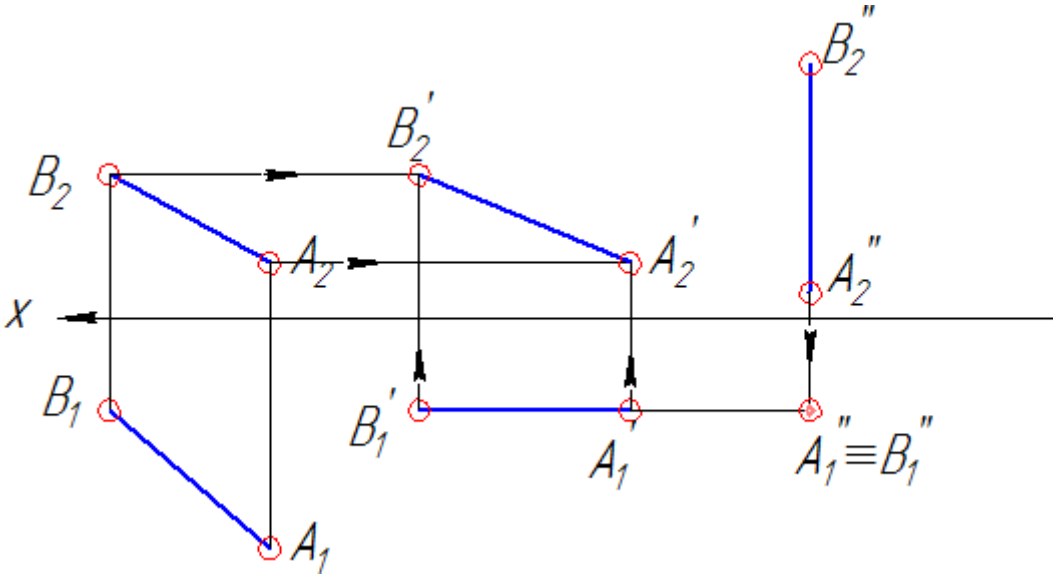


Рис.6

Задание №3. Преобразовать отрезок общего положения (рис.7) в проецирующий (перпендикулярный).

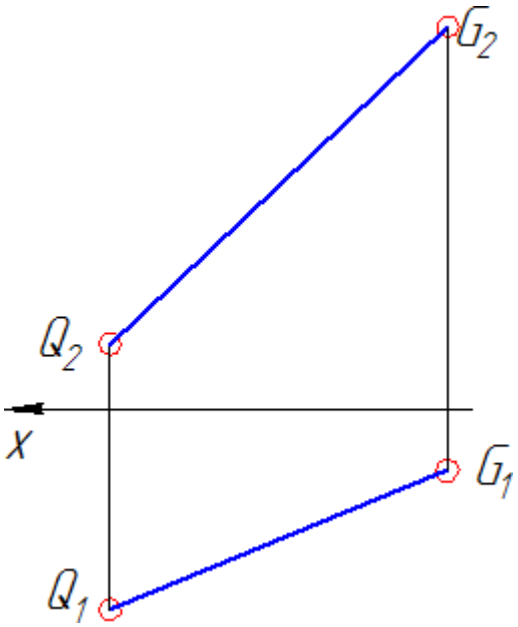


Рис.7

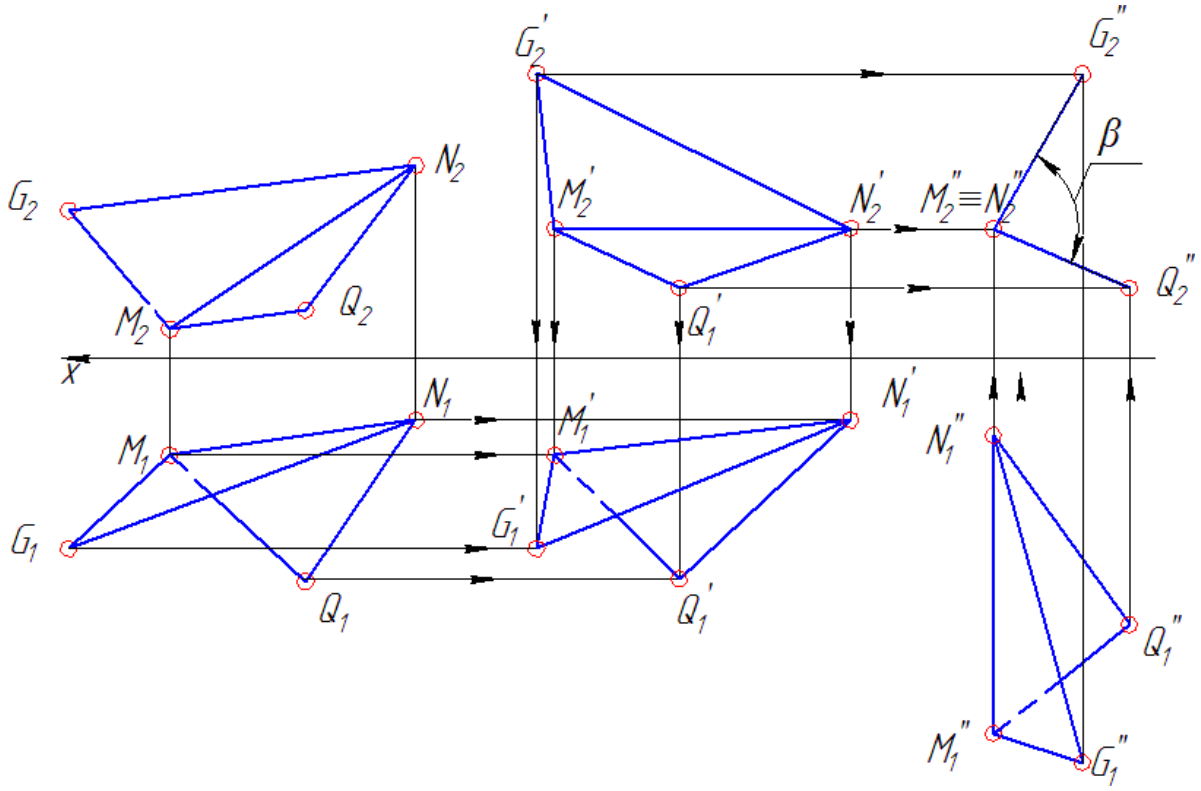
Плоскопараллельное перемещение можно использовать и для определения натуральной величины двугранного угла, образованного двумя пересекающими плоскостями. Решение сводится к преобразованию двугранного угла в линейный, измеряющий двугранный угол. Ребром двугранного угла служит линия, образованная пересечением граней. Если ребро окажется перпендикулярным к плоскости, то на эту плоскость ребро

проецируется в точку, а грани в виде отрезков, угол между которыми равен линейному углу данного двугранного (рис.8).

Пусть дан двугранный угол, образованный треугольными гранями QMN и MGN. Найти натуральную величину этого угла.

Решение заключается в перемещении двугранного угла таким образом, чтобы ребро MN, заняло положение, перпендикулярное $П_2$. Фронтальную проекцию двугранного угла, вращаем вокруг оси, без указания ее, перпендикулярной $П_2$ до положения при котором ребро MN будет параллельно оси x $M_2'N_2'//x$. Фронтальная проекция двугранного угла сохраняя свой вид и величину займет новое положение $M_2'N_2'G_2'Q_2'$. По линиям связи, проведенным от M_1, N_1, G_1, Q_1 параллельно оси x и от M_2', N_2', G_2', Q_2' перпендикулярно оси x определяем горизонтальную проекцию $M_1'N_1'G_1'Q_1'$ двугранного угла.

Второй поворот осуществляем вокруг произвольной оси (в задаче не показана) перпендикулярной $П_1$. Горизонтальная проекция двугранного угла при повороте сохраняет свой вид и размер, но занимает новое положение $M_1''N_1''G_1''Q_1''$, при котором ребро MN перпендикулярно оси x $(M_1''N_1''\perp x)$. Фронтальную проекцию $M_2''N_2''G_2''Q_2''$ найдем по линиям связи, при этом $M_2'' \equiv N_2''$, а грани проецируются в линии, угол β между которыми будет линейным углом двугранного.



Задание № 4. Найти натуральную величину двугранного угла β между гранями MNQ и GMN, методом плоскопараллельного перемещения (рис.9).

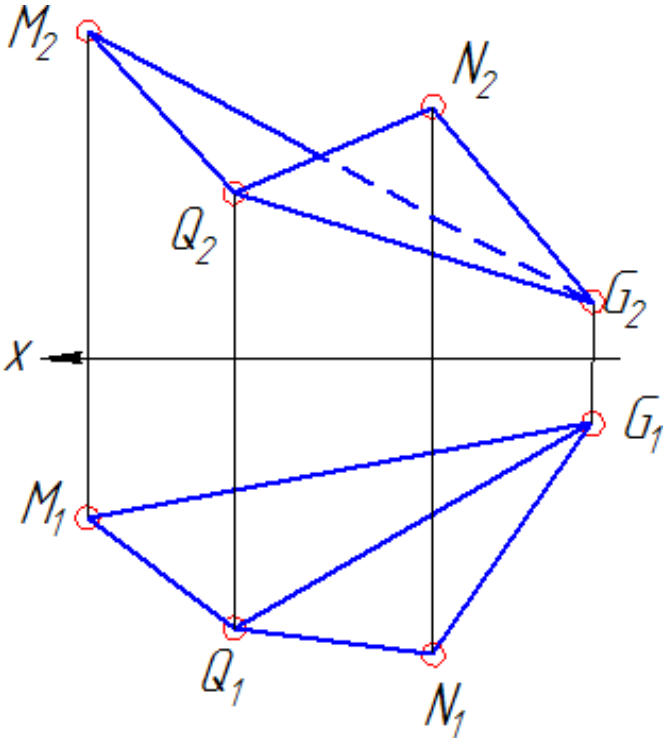


Рис.9

ВРАЩЕНИЕ ВОКРУГ ЛИНИИ УРОВНЯ

Для определения формы и размеров треугольника (или любой фигуры) можно ее повернуть вокруг принадлежащей ей горизонтали (фронтали) так, чтобы треугольник (фигура) расположилась параллельно плоскости $П_1$ ($П_2$). В момент параллельности плоскости треугольника горизонтальной (фронтальной) плоскости проекций горизонтальные (фронтальные) проекции каждой из перемещающихся вершин окажутся удаленными от оси вращения на расстоянии, равными радиусу вращения данной точки. Рассмотрим вращение треугольника вокруг горизонтали. Задача: Найти натуральную величину треугольника ABC.

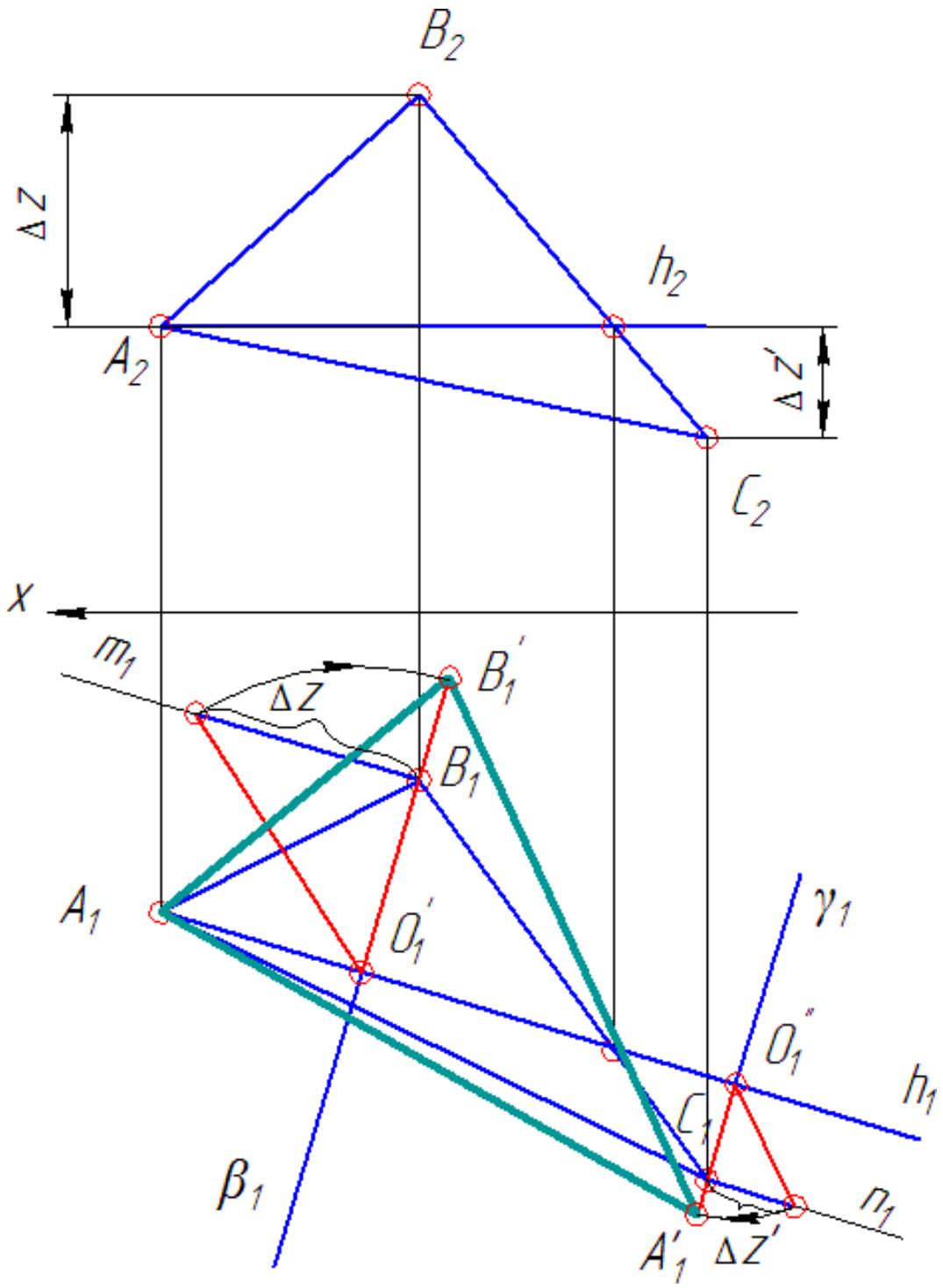
Проведем горизонталь h (h_1,h_2) ($h_2 \parallel x_{12}$, h_1 - по принадлежности) плоскости треугольника ABC ($h \subset ABC$). Вершины B и C будем вращать вокруг горизонтали h_1, вершина A остается неподвижной, так как она лежит на горизонтали (рис.10).

Вращение вершин вокруг горизонтали осуществляем по очереди. Вращаем вершину B.

Точка B вращается вокруг некоторой оси, описывая дугу окружности радиусом $R_{вр}$ в некоторой плоскости $\gamma \perp П_1$. Радиус вращения $R_{вр}$ находим опустив перпендикуляр из B_1 к h_1. Пересечение перпендикуляра с h_1 отметим точкой ($0_1'$), которая является центром вращения вершины B. Проекция B_1O_1' будет радиусом вращения ($R_{вр}$). Определяем натуральную

Рис. 8

величину $R_{вр}$ методом прямоугольного треугольника. Из вершины B_1 восстанавливаем перпендикуляр m к отрезку $O_1'B_1$, на котором от B_1 откладываем Δz - разность высот точек B и O, отметим т B_1', которую соединим с O_1'. $O_1'B_1'$ будет натуральной величиной $O_1'B_1$ - радиуса вращения вершины B вокруг горизонтали. Вращением вокруг O_1' перемещаем натуральную величину $O_1'B_1'$ в плоскость вращения γ_1 и



отмечаем т B_1''.

Вращаем вершину С.

Точка С вращается вокруг некоторой оси, описывая дугу окружности радиусом $R_{вр}$ в некоторой плоскости $\beta \perp П_1$. Радиус вращения $R_{вр}$ находим опустив перпендикуляр из C_1 к h_1. Пересечение перпендикуляра с h_1 отметим точкой (O_1''), которая является центром вращения вершины С. Проекция $O_1''C_1$ будет радиусом вращения ($R_{вр}$) вершины С. Определяем натуральную величину радиуса вращения методом прямоугольного треугольника. Из вершины C_1 восстанавливаем перпендикуляр n к отрезку $O_1''C_1$, на котором от C_1 откладываем Δz_1 - разность высот точек С и О″, отметим т C_1', которую соединим с O_1''. $O_1''C_1'$ будет натуральной величиной $O_1''C_1$ - радиуса вращения вершины С вокруг горизонтали. Вращением вокруг O_1'' перемещаем натуральную величину $O_1''C_1'$ в плоскость вращения β_1 и отмечаем т C_1''.

Соединим точки A_1, C_1'' и B_1'' получим новое положение проекции плоскости треугольника АВС, параллельного плоскости $П_1$. Следовательно, $A_1C_1''B_1''$ определяет натуральную величину треугольника АВС.

Задание № 5. Определить натуральную величину треугольника АВС методом вращения вокруг фронтали (рис.11).

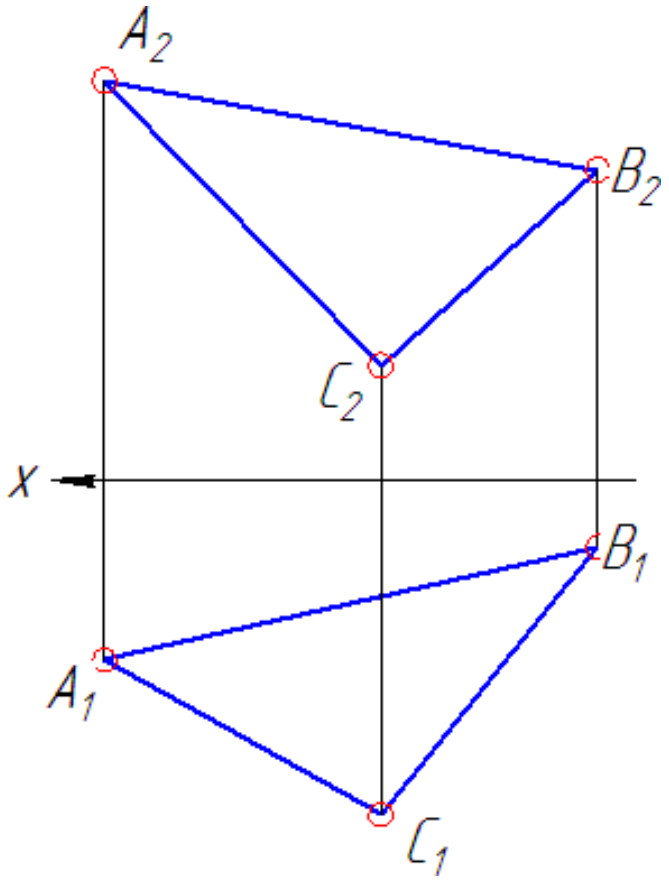


Рис. 11

Рис.10

Задание №6. Найти натуральную величину угла при вершине А, вращение вокруг горизонтали (рис.12)

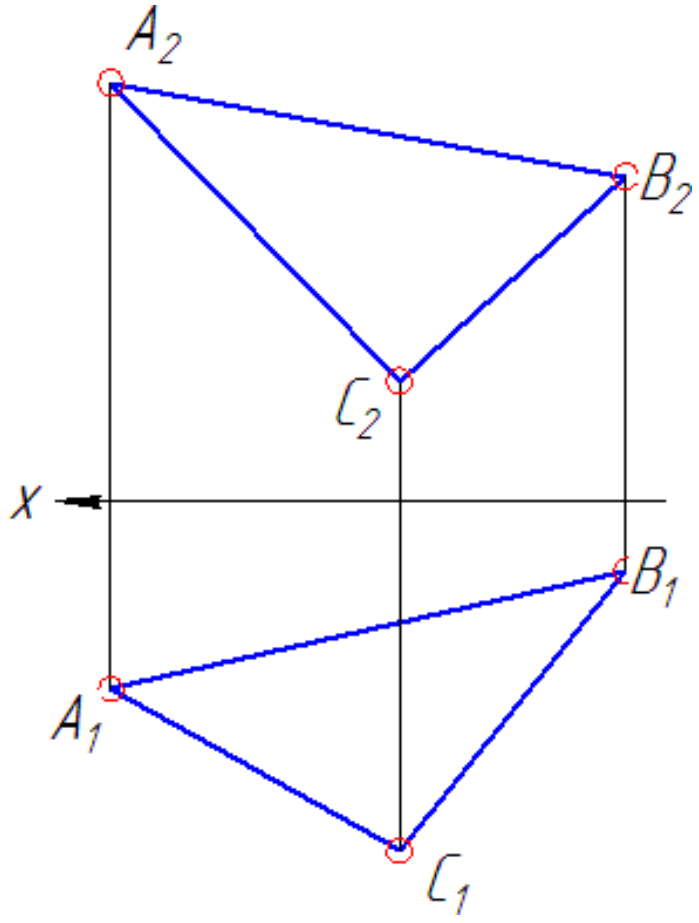


Рис.12

СПОСОБ ПЕРЕМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ.

Сущность способа заключается в том, что положение изображаемых объектов в пространстве остается неизменным, а система плоскостей $П_1$ $П_2$ дополняется новыми плоскостями, образующими с $П_1$ и $П_2$ или между собой, системы двух взаимно перпендикулярных плоскостей, принимаемых за плоскости проекций. Каждая новая система выбирается так, чтобы получить положение, наиболее удобное для выполнения нужного построения. Дополнительная плоскость, вводимая в систему $П_1$, $П_2$ в качестве плоскости проекций, выбирается согласно какому-либо условию, например, получить натуральную величину отрезка, угол его наклона к плоскости проекций, преобразовать отрезок в проецирующий и т. д.

В случае определения натуральной величины отрезка необходимо ввести дополнительную плоскость параллельную отрезку АВ (АВ $//П_4$) (рис. 13) ось x_{14} параллельна A_1 B_1 (x_{14} // A_1 B_1). Следовательно, на эпюре в плоскости $П_1$ проводим ось x_{14} // A_1 B_1 (рис.14). В плоскости $П_4$ расстояние от оси x_{14} до A_4 (B_4) равняется расстоянию от оси x_{12} до A_2

(B_2) в плоскости $П_2$ ($A_{x12}A_2 = Bx_{14}\ B_4$; ($A_{x12}\ B_2 = Bx_{14}\ B_4$) (рис.14). На эпюре в плоскость $П_4$ перпендикулярно новой оси x_{14} проводим линии связи, на которых от оси x_{14} откладываем высоту точек.

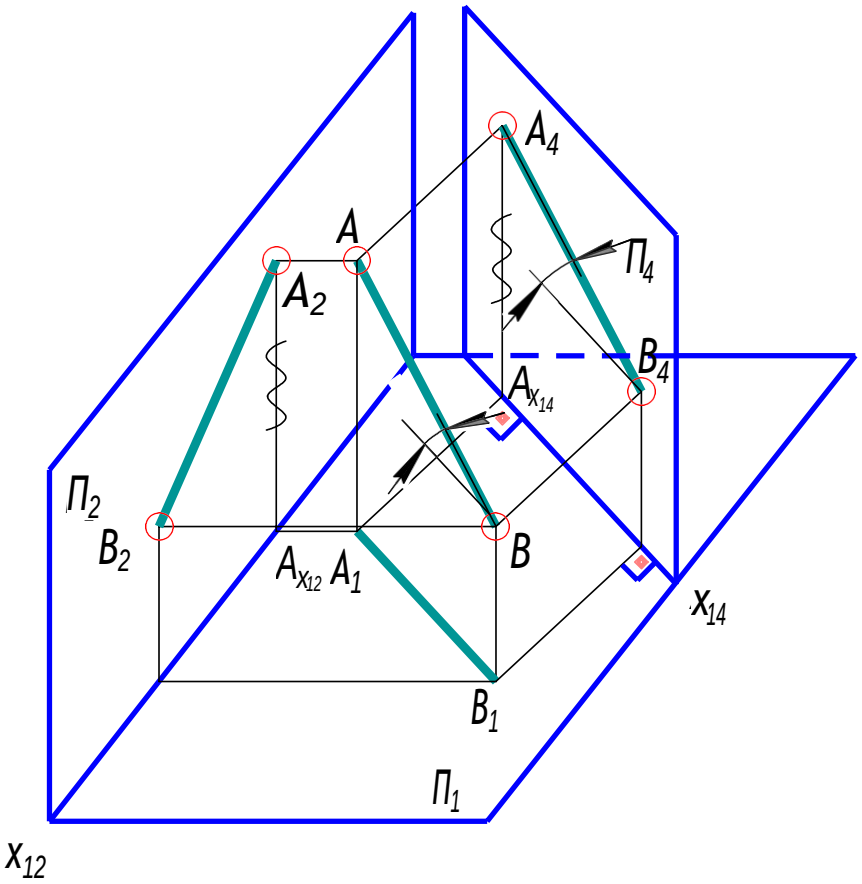


Рис.13

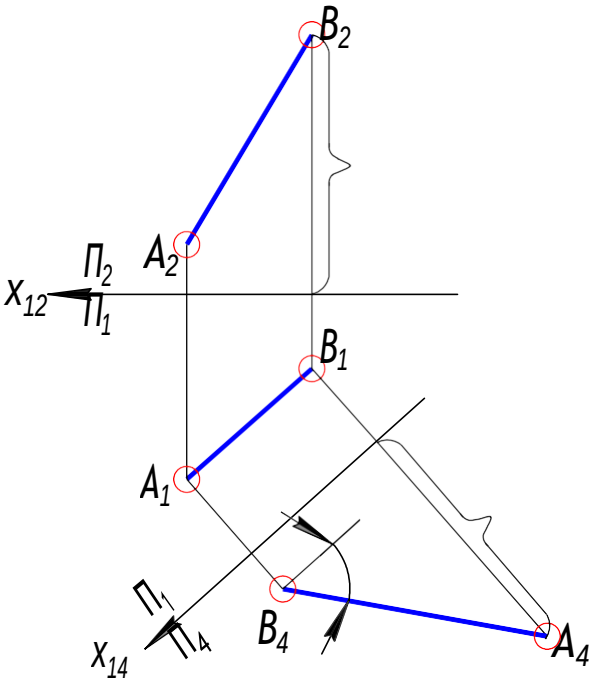


Рис. 14

В данной задаче можем найти угол наклона отрезка АВ к плоскости $П_1$, который будет измеряться углом меду A_4B_4 и осью x_{14}.

$$x_{12}\frac{П_2}{П_1} \rightarrow x_{14}\frac{П_1}{П_4}$$

$П_4$ // АВ, x_{14} // A_1B_1

Задание № 7. Найти натуральную величину отрезка АВ (рис.15) прямой общего положения и угол его наклона к плоскости $П_2$.

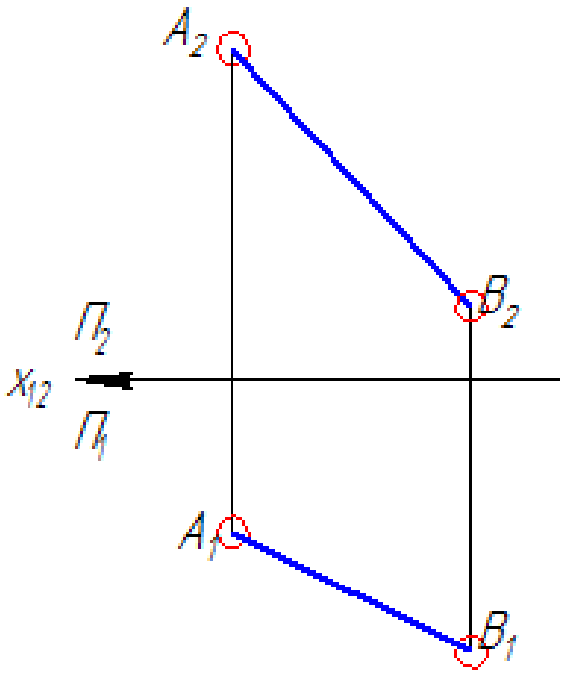


Рис.15

При преобразовании отрезка прямой общего положения в проецирующий недостаточно одной замены, необходимо произвести две замены плоскостей проекций. Сначала вводим новую плоскость проекций $П_4$ параллельную отрезку АВ, с помощью такой замены найдем натуральную величину отрезка АВ. На следующим этапе введем плоскость проекций $П_5$ перпендикулярную отрезку АВ (рис.15). Символически можно записать:

$$x_{12}\frac{П_2}{П_1} \rightarrow x_{14}\frac{П_1}{П_4} \rightarrow x_{45}\frac{П_4}{П_5}$$

1. $П_4$ // АВ, x_{14} // A_1B_1
2. $П_5 \perp$ АВ, $x_{45} \perp A_4 B_4$.

Построение проекции A_1 B_1 описано на странице 13-14. Дальнейшее решение будет: проводим ось x_{45} новой плоскости перпендикулярно A_1 B_1 и проводим линии связи т.к. $x_{45} \perp A_1$ B_1, то линия связи будет одна, на которой в плоскости $П_5$ от оси x_{45} отложим расстояние, равное расстоянию от оси x_{14} до B_1 (A_1) B_1 A_1A_{x14}

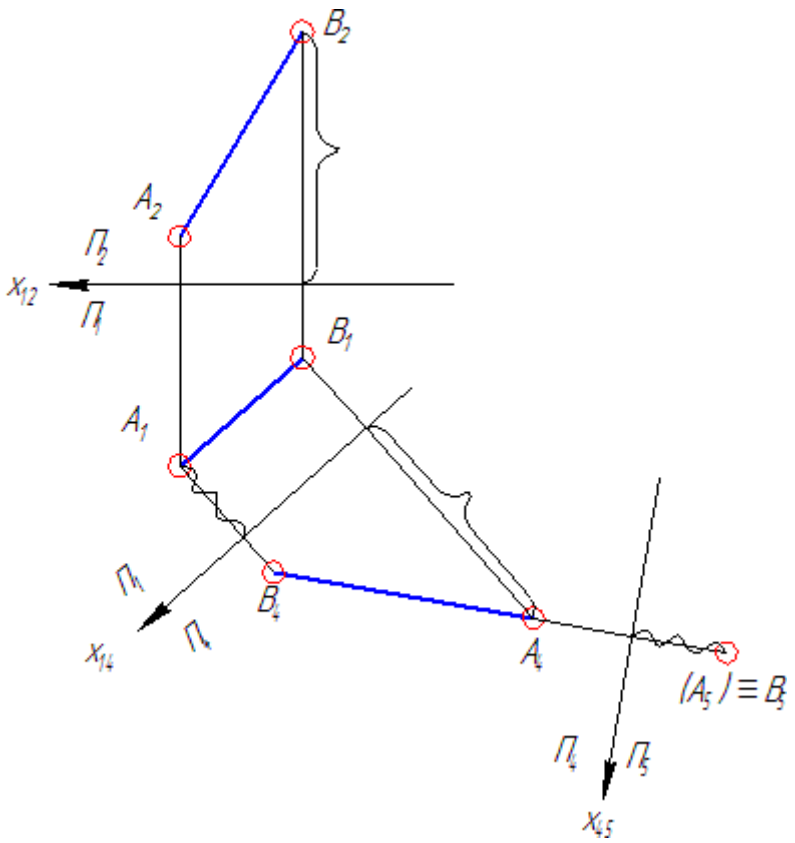


Рис. 16

Задание № 8. Преобразовать отрезок АВ (рис.17) прямой общего положения в проецирующий и найти угол его наклона к плоскости $П_1$.

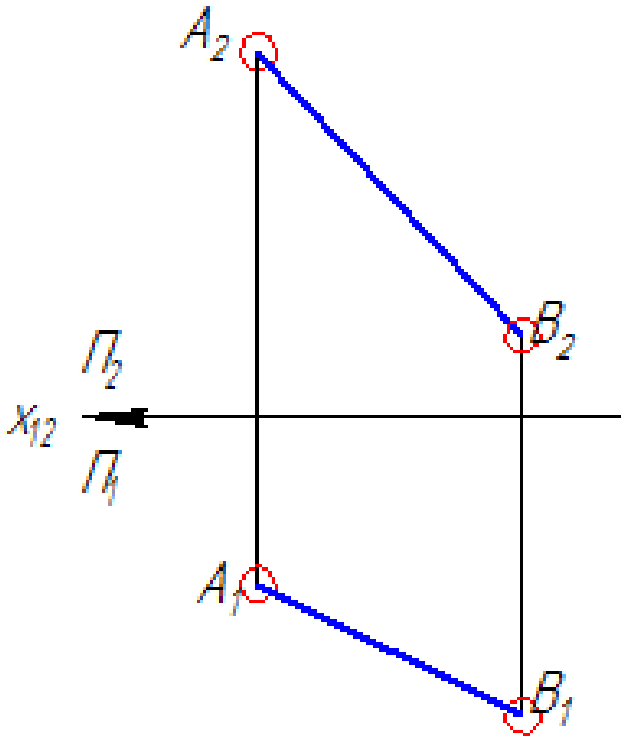


Рис.17

Для определения натуральной величины плоской фигуры (треугольника) общего положения используем метод замены плоскостей, при котором последовательно вводим дополнительные плоскости, сначала перпендикулярную заданному треугольнику, а потом параллельную. Плоскость ABC на чертеже будет перпендикулярна плоскости проекций, если ее горизонтальная проекция h_1 горизонтали h (фронтальная проекция f_2 фронтали f) будет перпендикулярна новой оси x_{14} (x_{24}) (рис.8). Поэтому первым пунктом в решении задачи будет построение горизонтали (фронтали) заданной плоскости. Затем проводим ось x_{14} перпендикулярную горизонтальной проекции горизонтали (или x_{24} перпендикулярную фронтальной проекции фронтали) и проецируем точки A, B и C в плоскость $П_4$.

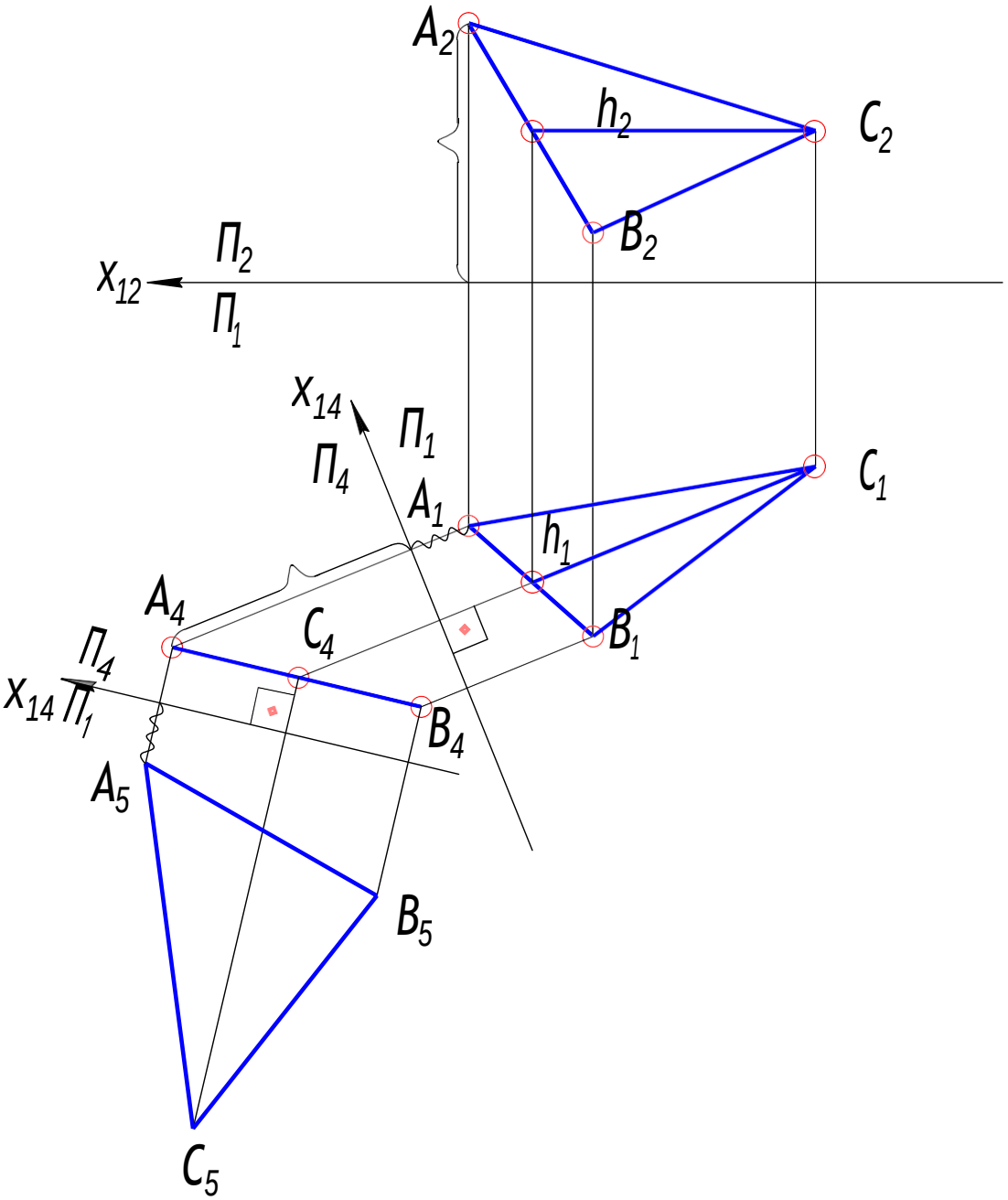


Рис. 18

Расстояние в плоскости $П_4$, откладываем равное координате точек А и В по оси z, т.е. высоту точек А и В. Плоскость треугольника АВС в плоскости $П_4$ проецируется в линию ($A_4B_4C_4$). Далее вводим новую плоскость $П_5$, параллельную плоскости треугольника АВС ($П_5$//АВС). Новую ось проводим параллельно $A_4B_4C_4$. Проецируем точки в плоскость $П_5$. Линии связи проводим перпендикулярно оси x_{45}. В эту плоскость треугольник проецируется в натуральную величину.

Алгоритм решения: $x_{12} \rightarrow x_{14} \rightarrow x_{45}$

$П_2/П_1 \rightarrow П_1/П_4 \rightarrow П_4/П_5$

$П_4 \perp$ АВС, $x_{14} \perp h_1$ ($h \in$АВС)

$П_5$ // АВС, x_{45} // $A_4 B_4 C_4$

Задание № 9. Найти угол наклона плоскости треугольника АВС (рис.19), занимающего общее положение к плоскости $П_1$.

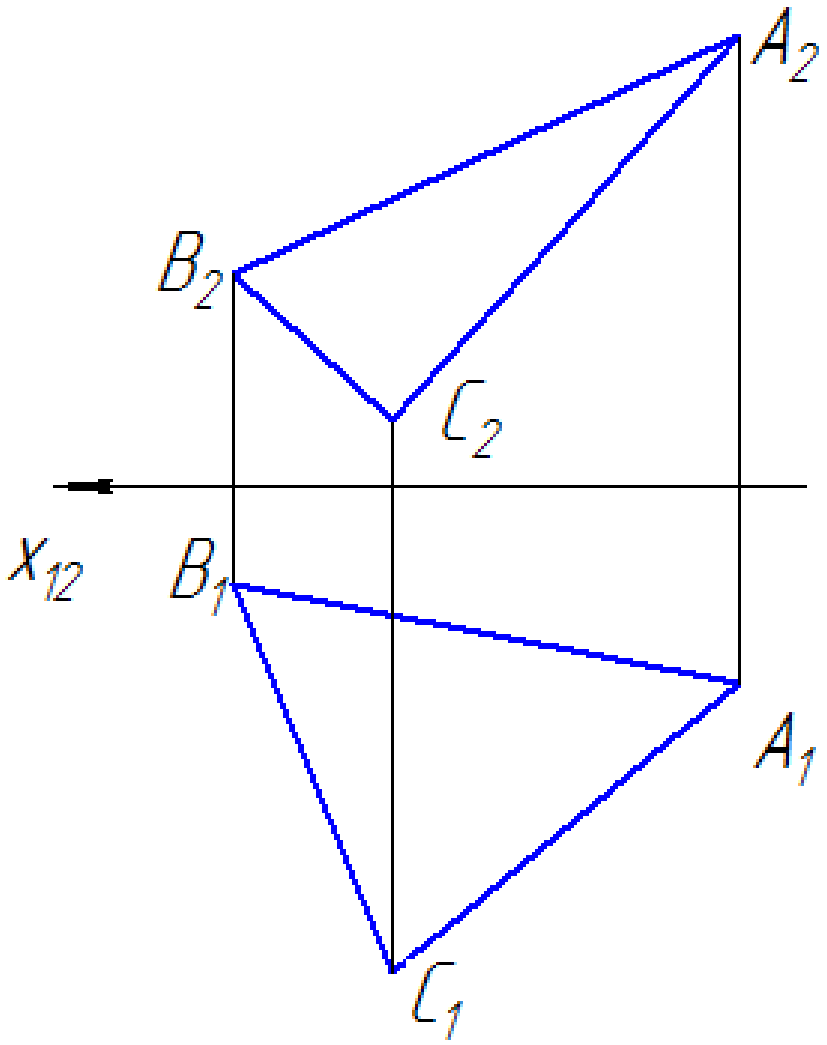


Рис. 19

Задание № 10. Найти натуральную величину треугольника ABC (рис.20), занимающего общее положение и угол его наклона к плоскости $П_2$.

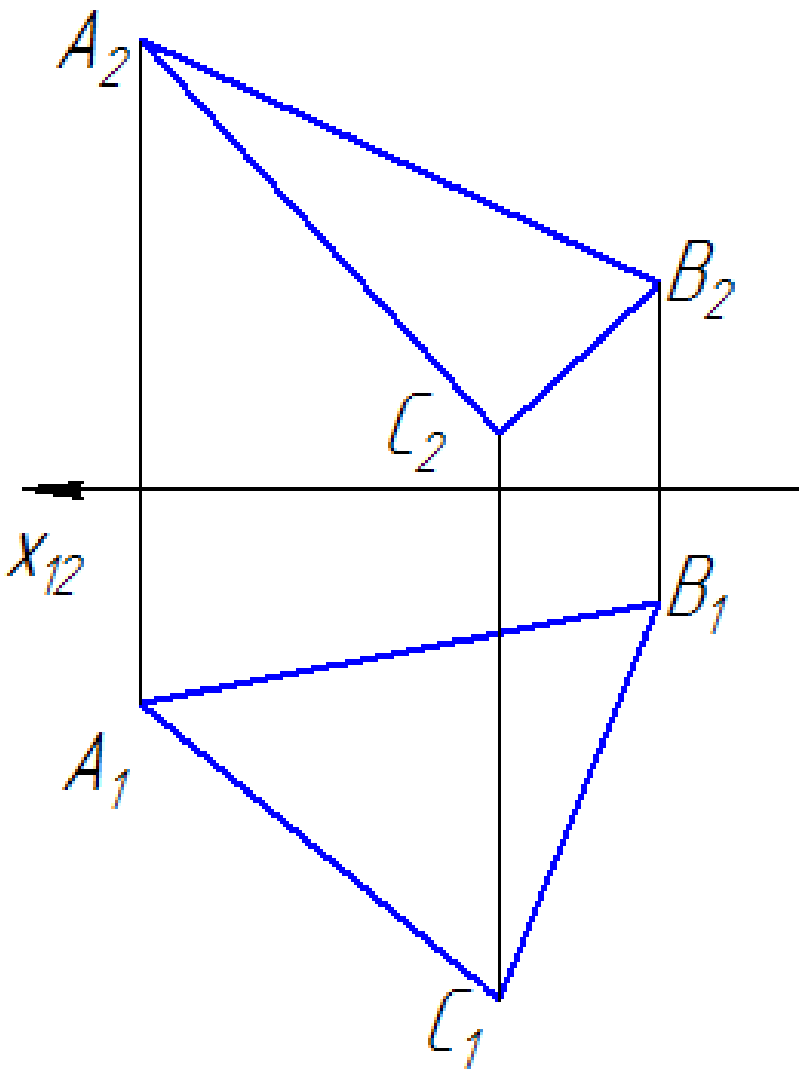


Рис.20

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧЕРТЕЖА
Решение задач по материалам второго модуля

Методические рекомендации
к выполнению практической работы и подготовке к модулю
по курсу: «Начертательная геометрия для студентов всех направлений
очной и заочной форм обучения

ЧЕЛЫШЕВА Ирина Александровна

Подписано в печать Формат 60x84 1/16
Бум. офсет. Усл. печ. л. Уч.-изд.л.
Тираж 100 экз. Заказ Бесплатно
Саратовский государственный технический университет
410054, Саратов, Политехническая ул., 77
Отпечатано в РИЦ СГТУ. 410054, Политехническая ул., 77